

## **Aplicação do Modelo de Densidade Lateral Global UNB\_TopoDens na Modelagem da RTM no Estado do Paraná**

*Application of the Global Lateral Density model UNB\_TopoDens in Modeling  
the RTM in the State of Paraná*

*Aplicación del Modelo de Densidad Lateral Global UNB\_TopoDens en la  
Modelación de la RTM en el Estado de Paraná*

Roosevelt de Lara Santos Junior<sup>1</sup>

---

**RESUMO:** A RTM (ou efeito residual da modelagem topográfica), foi calculada para a parte continental do estado do Paraná, utilizando 2535 pontos, integrantes um grid regular 5'x5' de arco esférico, do modelo de relevo global ETOPO1, associado aos modelos de densidades laterais, UNB\_TopoDens (global) e Harkness (densidade média global 2670 kg/m<sup>3</sup>). O modelo matemático empregado foi a integral de Newton para o ponto material. No cálculo das RTM, em cada ponto, o raio de integração considerado foi de 210 quilômetros. Os resultados para as RTM calculadas (para os dois diferentes modelos de densidades) ultrapassaram os 2,3 milímetros, (com valor médio de cerca de 1,7 milímetros) indicando a importância da consideração da RTM nos estudos altimétricos de precisão. Os modelos de densidade testados, UNB\_TopoDens e Harkness, variaram entre si, apenas 1,5 % e tiveram um coeficiente de correlação de 99,1%. Para futuras aplicações, sugerem-se que sejam adicionados novos aprimoramentos do modelo matemático, como utilização de correções harmônicas, bem como o uso de dados posicionais e de densidades laterais de altas resoluções. Também importantes serão as avaliações em acurácia dos diversos grupos de dados e a aplicação de modelos de ajustamento durante as diversas etapas de processamentos.

**PALAVRAS-CHAVES:** RTM; Integral de Newton; densidade lateral.

**ABSTRACT:** The RTM (Residual Topographic Modeling Effect) was calculated for the continental part of the state of Paraná using 2,535 points, part of a regular 5'x5' arc-grid from the global relief model ETOPO1, combined with lateral density models, UNB\_TopoDens (global) and Harkness (global average density of 2670 kg/m<sup>3</sup>). The mathematical model used was Newton's integral for a material point. In the RTM calculations, at each point, the integration radius considered was 210 kilometers. The results for the calculated RTM (for the two different density models) exceeded 2.3 millimeters, with an average value of about 1.7 millimeters, indicating the importance of considering RTM in precision altimetric

---

<sup>1</sup> Professor da Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Instituto de Geociências, Departamento de Geodesia. Doutorado no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas pela Universidade Federal do Paraná (UFPR). E-mail: rooseveltdelara@ufrgs.br.

studies. The tested density models, UNB\_TopoDens and Harkness, differed by only 1.5% and had a correlation coefficient of 99.1%. For future applications, further improvements to the mathematical model are suggested, such as using harmonic corrections, as well as employing high-resolution positional and lateral density data. Also important will be the accuracy assessments of various data groups and the application of adjustment models throughout different processing stages.

**KEYWORDS:** RTM; Newton's Integral; lateral density.

**RESUMEN:** El RTM (Efecto Residual de la Modelización Topográfica) se calculó para la parte continental del estado de Paraná utilizando 2,535 puntos, integrantes de una malla regular de arco esférico de 5'x5' del modelo de relieve global ETOPO1, asociado a los modelos de densidad lateral UNB\_TopoDens (global) y Harkness (densidad media global de 2670 kg/m<sup>3</sup>). El modelo matemático empleado fue la integral de Newton para un punto material. En el cálculo de las RTM, en cada punto, el radio de integración considerado fue de 210 kilómetros. Los resultados de las RTM calculadas (para los dos modelos de densidad diferentes) superaron los 2.3 milímetros, con un valor medio de aproximadamente 1.7 milímetros, lo que indica la importancia de considerar la RTM en estudios altimétricos de precisión. Los modelos de densidad probados, UNB\_TopoDens y Harkness, solo variaron entre sí un 1.5% y tuvieron un coeficiente de correlación del 99.1%. Para futuras aplicaciones, se sugieren nuevos perfeccionamientos del modelo matemático, como el uso de correcciones armónicas, así como la incorporación de datos posicionales y de densidades laterales de alta resolución. También serán importantes las evaluaciones de precisión de los diversos grupos de datos y la aplicación de modelos de ajuste durante las diferentes etapas del procesamiento.

**PALABRAS-CLAVE:** RTM; Integral de Newton; densidad lateral.

---

## INTRODUÇÃO

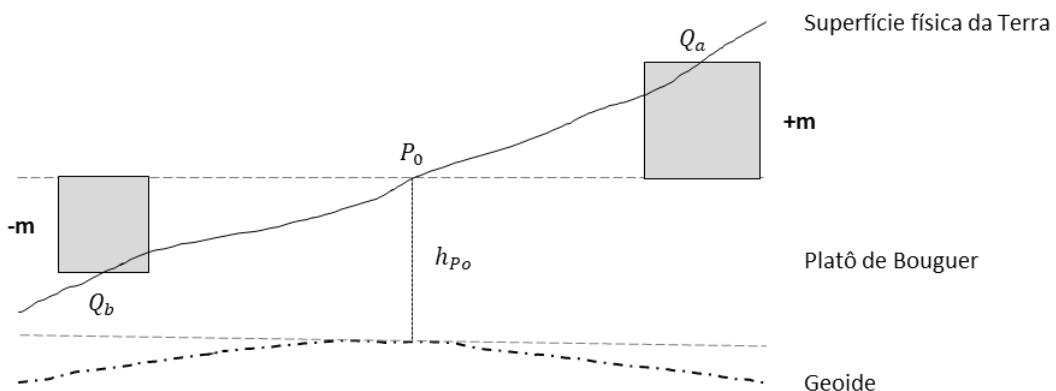
Na determinação do geoide através da teoria de Stokes considera-se a exclusão das massas topográficas e seu equilíbrio isostático nas proximidades da superfície de contorno. O efeito indireto das massas topográficas sobre o potencial gravitacional deve ser considerado durante a redução topo-isostática da gravidade, visando a determinação adequada do geoide (Heiskanen; Moritz, 1967). Originalmente, a teoria de Molodenskii, Eremeev e Yurkina (1962), embora livre de quaisquer reduções de massas topográficas, considera a redução de terreno como um termo de correção, dentro da solução de primeira ordem da chamada série de Molodenskii.

No processo de modelagem do campo gravitacional local e regional, considera-se o modelo residual de terreno (RTM), normalmente aplicado ao contexto da técnica remove-cálcula-restaura (RCR), na modelagem e processamento de dados do campo gravitacional terrestre. Na etapa de restauração dos efeitos das massas topográficas, seus valores numéricos podem ser afetados pelas incertezas (ou desconhecimento) do comportamento das densidades laterais (Odalović *et al.* 2018; Sjoberg, 2004; Vanicek *et al.* 2004; Wang *et al.*

2021). Nas reduções gravimétricas, a denominada correção de terreno ( $C_T$ ), representa o efeito gravitacional das massas topográficas (nas imediações da superfície de contorno), geralmente considerada de forma inadequada (ou completamente omitida), tendo em vista as limitações da redução de Bouguer ao determinar o valor da gravidade no geoide, com base nos valores dos resultados das medições na superfície física da Terra (Heiskanen; Moritz, 1967; Tenzer; Hamayun; Prutkin, 2010).

A Figura 1 apresenta os principais elementos envolvidos no cálculo do potencial gravitacional ( $\nu$ ), entre dois pontos  $P_0$  e  $Q_i$ , de massas (m) e volumes prismáticos. Os referidos pontos estão localizados sobre a superfície física terrestre (onde se desenvolvem os levantamentos geodésicos); o geoide, representando uma equipotencial do campo da gravidade (utilizada como referência das altitudes ortométricas ( $h$ )); o platô de Bouguer (que promove a remoção parcial das massas topográficas próximas do geoide) e as massas topográficas residuais remanescentes ( $C_{RTM}$ ), representando o efeito residual da modelagem topográfica (RTM).

**Figura 1 – Elementos do potencial gravitacional**



**Fonte:** Adaptado de Heiskanen e Moritz (1967).

A Figura 2 mostra o potencial gravitacional  $\nu(r, \varphi, \lambda)$ , de um prisma regular (de massa homogênea (m), constante gravitacional (G) e densidade ( $\rho$ )), o qual, pode ser determinado utilizando a integral de Newton (Nagy; Papp; Benedek, 2000). Os potenciais gravitacionais ( $\nu_i$ ) entre os pontos  $P_0$  e  $Q_i$ , são calculados pela Equação 3, em primeira aproximação (ponto material), e o somatório dos potenciais gravitacionais dos pontos considerados resultam no valor do efeito da RTM dos  $Q_i$  sobre  $P_0$  (Moritz, 1980). Tais somatórios divididos pelas respectivas altitudes normais, resultam nas anomalias de altitude, aqui assumidas, como o efeito da RTM ( $C_{RTM}$ ) sobre a altimetria (Equação 4).

$\psi_0$ , ângulo geocêntrico entre as direções de  $P_0$  e  $Q_i$ ;

$$\cos\psi_0 = \sin\varphi \cdot \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cdot \cos\varphi_0 \cdot \cos\delta\lambda \quad (1)$$

$l_0$ , distância euclidiana entre  $P_0$  e  $Q_i$ ;

$$l_0 = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2 \cdot r \cdot r_0 \cdot \cos\psi_0} \quad (2)$$

$v(r, \varphi, \lambda)$ , potencial gravitacional calculado pela integral de Newton;

$G$ , constante gravitacional;

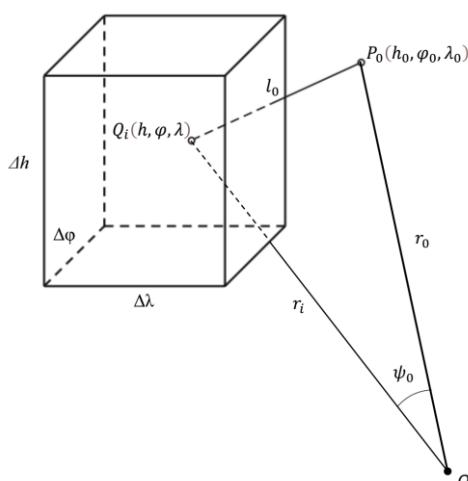
$\rho$ , densidade;

$\gamma$ , gravidade normal;

$$v(r, \varphi, \lambda) = G \cdot \rho \cdot \Delta r \cdot \Delta\varphi \cdot \Delta\lambda \cdot [(r_0^2 \cdot \cos\varphi_0)/l_0] \quad (3)$$

$$C_{RTM} = \sum [v(r, \varphi, \lambda)/\gamma] \quad (4)$$

**Figura 2 – Elementos da RTM considerando a aplicação da integral de Newton**



**Fonte:** Adaptado de Heck e Seitz (2007).

Segundo Hinze (2003), um dos parâmetros mais amplamente adotados nas geociências é o valor de 2670 kg/m<sup>3</sup> (2,67 g/cm<sup>3</sup>), para a densidade média ( $\rho_m$ ) das rochas superficiais da crosta continental. Este valor é resultado da compilação, por William Harkness (1891), de diversos trabalhos, de diferentes autores, realizados no período 1811 a 1882, visando a determinação do valor da densidade média das rochas superficiais em nível global. O valor de 2670 kg/m<sup>3</sup> geralmente é assumido, considerando, a densidade das rochas cristalinas superficiais dos continentes com composição granítica (a densidade das rochas graníticas varia de 2500 a 2800 kg/m<sup>3</sup>, com valor médio aproximado 2670 kg/m<sup>3</sup>).

Sheng *et al.* (2019), descrevem com detalhes o modelo global de densidades topográficas lateralmente variáveis da *University of New Brunswick* (UNB\_TopoDens), e menciona como principal desafio, em sua construção, os diferentes níveis de estudos e determinações quanto às variações globais de densidade. Enquanto algumas nações e ou continentes têm modelos de densidade topográfica lateral de alta resolução (malha densa), muitos ainda não os têm. Na tentativa de resolver esse problema, muitos modelos de

densidade (regionais e globais) foram construídos utilizando principalmente o método de inversão do campo gravitacional (Bear; Al-Shukri; Rudman, 1995; Tenzer *et al.*, 2018; Toushmalani; Saibi, 2015). Tendo em vista que, os resultados do emprego do método da inversão gravitacional, em muitos casos pode ser redundante (assumindo mais de um valor para o parâmetro calculado), devido a indeterminações numéricas, não será aceitável em diversas aplicações geofísicas e geodésicas.

O modelo UNB\_TopoDens (Sheng *et al.*, 2019), visa modelar de maneira global a densidade topográfica lateralmente variável para dois propósitos: o primeiro, permitir uma compensação mais rigorosa dos efeitos topográficos em escala global, o segundo propósito como um conjunto de dados de primeira estimativa para países/regiões que não possuam modelos de densidades documentados e disponíveis.

Existem várias técnicas para estimar diretamente a distribuição de densidade; a mais promissora vem das informações relacionadas à velocidade sísmica, como utilizado no modelo CRUST1.0. Este modelo fornece informações de densidade ao longo da crosta e do manto superior em uma grade global de  $1^\circ \times 1^\circ$  (Laske *et al.*, 2012). No entanto, existem vários problemas que afetam o modelo CRUST1.0, o que, por vezes, o invalida para algumas aplicações nas geociências. Um benefício adicional do desenvolvimento de um modelo global de densidade topográfica lateralmente variável é que ele também nos permite confirmar se  $2670 \text{ kg/m}^3$ , a densidade média do granito, é um valor razoável a ser considerado para a densidade média topográfica global. Este valor tem sido usado quase universalmente e agora tem-se um meio para determinar sua representatividade do valor da densidade topográfica média global. Para avaliar um valor médio de densidade topográfica, algumas variáveis devem serem consideradas. Na formulação do modelo UNB\_TopoDens, o valor de  $2670 \text{ kg/m}^3$  foi atribuído a todas as regiões 'sem dados' e, portanto, não deve ser considerado válido na avaliação de um novo valor médio de densidade topográfica. Em segundo lugar, devido aos problemas com as classificações de águas interiores, estas também foram desconsideradas no cálculo. Portanto, é intuitivamente claro que o modelo global ideal deve ser composto principalmente por mapas regionais e locais.

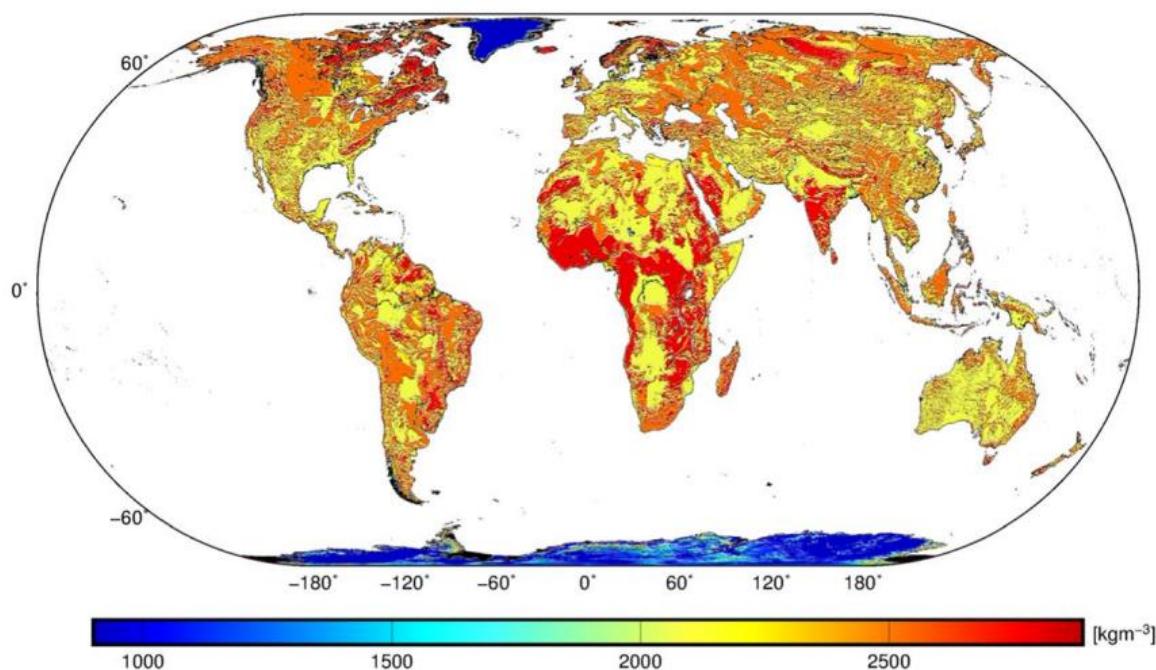
Hartmann e Moosdorf (2012), produziram um modelo litosférico global (GLIM) reunindo várias fontes de dados regionais de todo o mundo. O problema fundamental com esse modelo é que o GLIM divide a litosfera em 15 estruturas, mas não fornece informações de densidade para essas estruturas; portanto, para tais estruturas é necessário atribuir valores de densidades apropriados, visando sua futura utilização.

O modelo litológico do modelo de densidades UNB\_TopoDens foi desenvolvido a partir dos modelos litológicos de Carmichael (1989) e Tenzer, Hamayun e Prutkin, (2010). A diferença entre esses modelos reside nos conjuntos de dados que foram usados para atribuir valores médios de densidade e suas respectivas dispersões. Os dados de Carmichael (1989),

---

são principalmente para rochas ígneas, com um número muito menor de amostras para rochas sedimentares e quase nenhum dado para rochas metamórficas e uma variedade de outras litologias importantes, como calcários, evaporitos e rochas piroclásticas, este fato foi determinante para os idealizadores do UNB\_TopoDens definirem o modelo de densidades de UNB\_TopoDensT, como referência ao UNB\_TopoDens. Deve-se ter em conta que o método mais eficaz para determinar o valor da densidade é sua medição no local e avaliação em laboratório. Esta metodologia permite considerar, por exemplo, os efeitos de porosidade e de fraturas nas amostras, bem como suas variações mineralógicas, a partir de um banco de dados representativo, tornando possível a avaliação do valor da densidade média e informações sobre sua dispersão. Para litologias dentro de uma amplitude de valores que não permite a avaliação de seu grau de dispersão considera-se que a amplitude de variação dos valores litológicos esteja dentro do limite de confiança de 95%, na estimativa de seu desvio padrão, assumindo ainda que, os dados têm uma distribuição normal e que o valor da densidade do ponto médio (mediana) é considerado como sendo a media (Vaníček; Krakiwsky, 1986). O comportamento global do UNB\_TopoDens pode ser visto na Figura 3, a seguir.

**Figura 3 –** Modelo global de densidades laterais UNB\_TopoDens

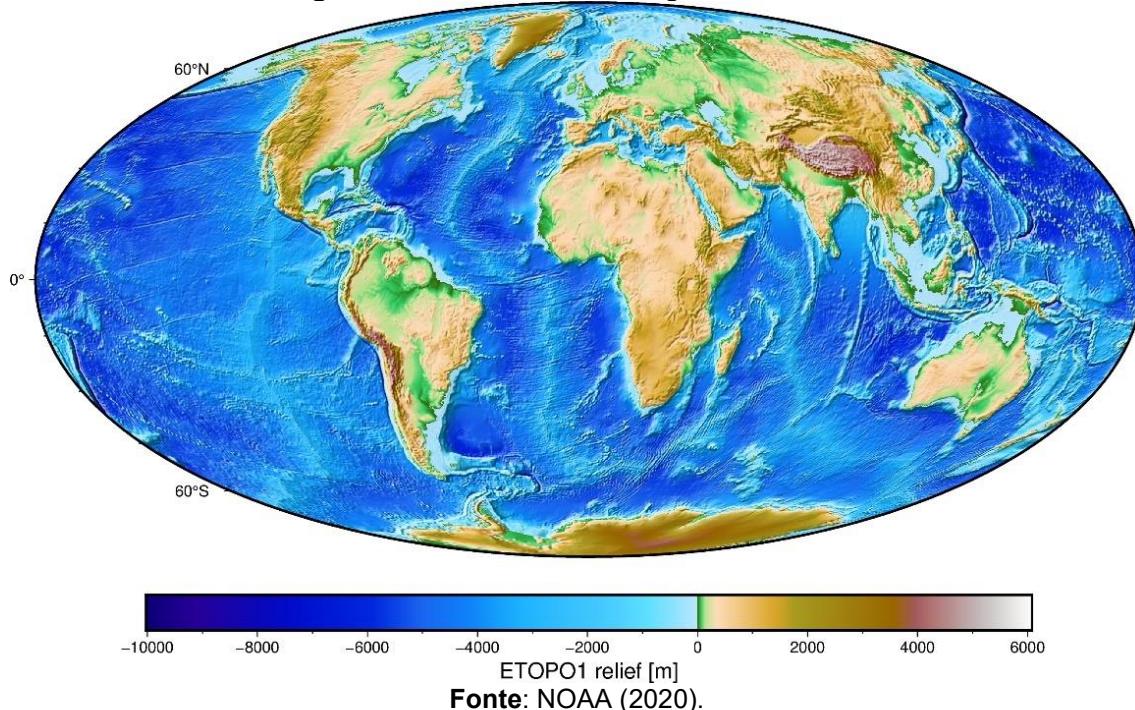


**Fonte:** Tenzer et al. (2021).

Em agosto de 2008, o *National Geophysical Data Center* (NGDC), um órgão da *National Oceanic and Atmospheric Administration* (NOAA), desenvolveu o modelo de relevo global (*Global Relief Model*, ETOPO1), figura 4, como uma melhoria para o ETOPO2v2. O ETOPO1

disponibiliza as versões '*Ice Surface*' (superfície das camadas de gelo da Antártica e da Groenlândia) e '*Bedrock*' (base das camadas de gelo). Ambas as versões do ETOPO1 foram geradas a partir de diversos conjuntos de dados digitais globais e regionais, que foram ajustados para data horizontais e verticais comuns, e então avaliados e editados conforme necessário. Os dados batimétricos, topográficos e de linha costeira usados no ETOPO1 foram obtidos do NGDC, do *Antarctic Digital Database* (ADD), do *European Ice Sheet Modeling Initiative* (EISMINT), do *Scientific Committee on Antarctic Research* (SCAR), do *Japan Oceanographic Data Center* (JODC), do *Caspian Environment Programme* (CEP), da *Mediterranean Science Commission* (CIESM), da *National Aeronautics and Space Administration* (NASA), do *National Snow and Ice Data Center* (NSIDC), do *Scripps Institute of Oceanography* (SIO) e do *Leibniz Institute for Baltic Sea Research* (LIBSR). O ETOPO1 é verticalmente referenciado ao nível do mar e horizontalmente ao *World Geodetic System 1984* (WGS84). O do ETOPO1 é de 1'x1' (NOAA, 2009). A Figura 4 apresenta uma visão global do ETOPO1.

**Figura 4 – Modelo de relevo global ETOPO1**

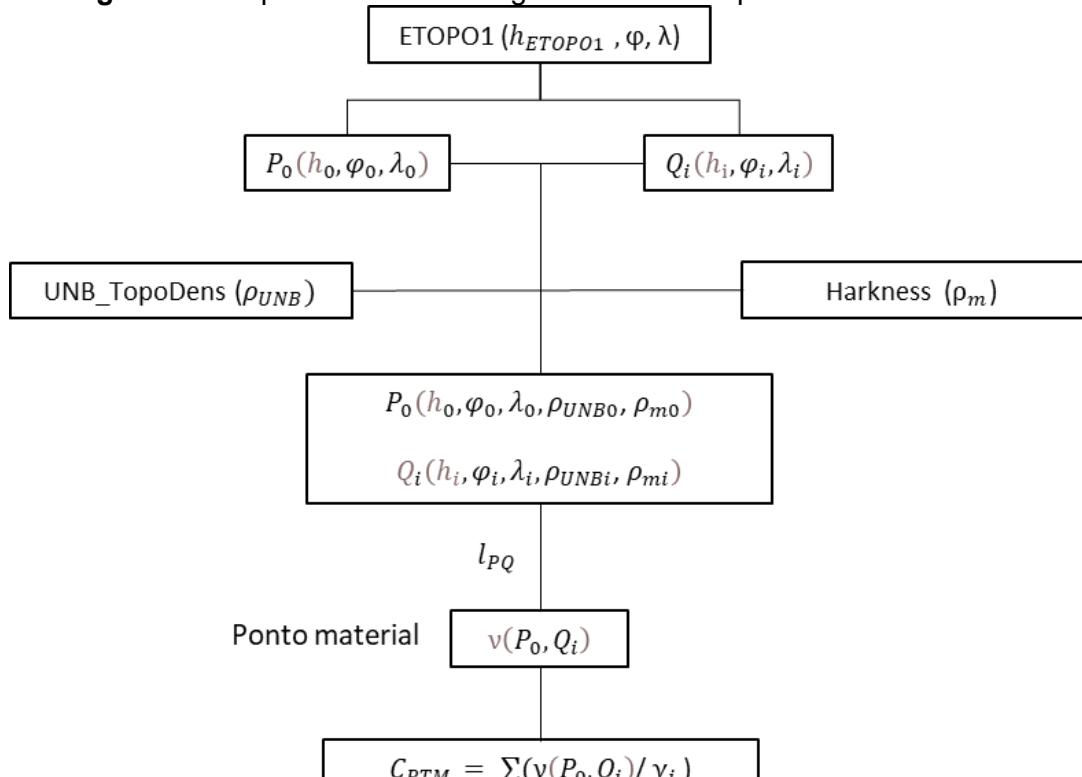


## DESENVOLVIMENTO

A Figura 5 mostra o fluxograma das principais etapas da metodologia desenvolvida visando a determinação da RTM no estado do Paraná. Na primeira etapa realizaram-se a seleção e organização dos dados oriundos dos modelos globais utilizados, UNB\_TopoDens (Figura 6) e ETOPO1 (Figura 7). Reunidos e organizados os mencionados dados (altitude

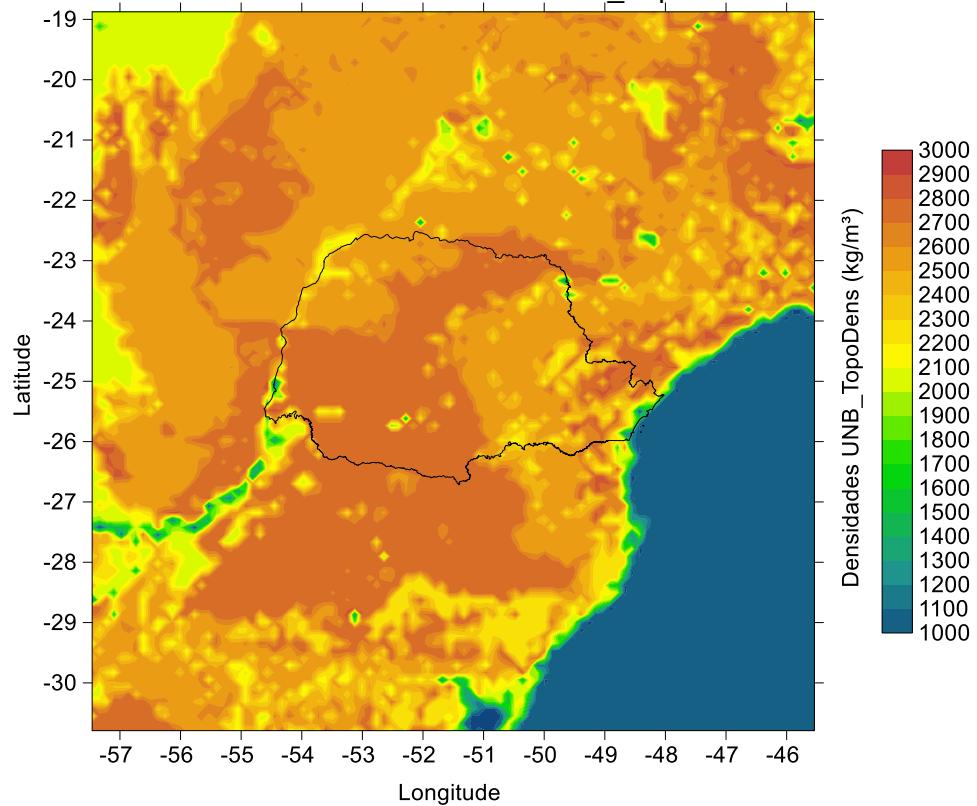
ortométrica, latitude, longitude e densidade), as etapas posteriores envolveram os processamentos dos valores da RTM para o estado do Paraná, utilizando o modelo global UNB\_TopoDens de densidades laterais e o modelo de densidade média (Harkness), com resolução espacial de 5'x5' de arco esférico, totalizando 2535 pontos dentro do território paranaense. Os valores das RTM foram determinados a partir de rotinas desenvolvidas em ambiente Matlab, pelo autor. A edição foi realizada nos ambientes Microsoft Office e Golden Software Surfer. Para cada um dos 2535 pontos ( $P_0$ ), foram calculados os respectivos valores da RTM, considerando todos os pontos ( $Q_i$ ), interiores a uma circunferência de raio 210 quilômetros (Figuras 6, extrato UNB\_TopoDens e Figura 7, extrato ETOPO1), com centro em  $P_0$ , utilizando a integral de Newton (ponto material) como modelo matemático (Fórmula 3).

**Figura 5** – Esquema da metodologia desenvolvida para cálculo da RTM



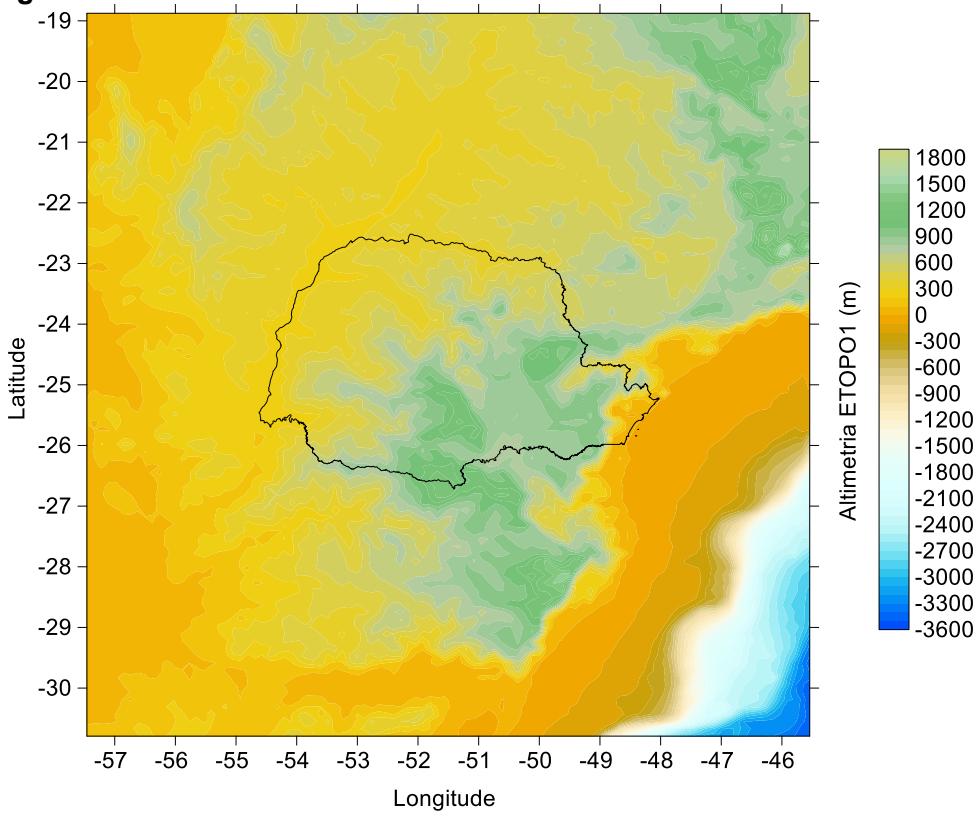
**Fonte:** O próprio autor.

**Figura 6 – Extrato das densidades do modelo UNB\_TopoDens no estado do Paraná**



**Fonte:** O próprio autor.

**Figura 7 – Extrato do ETOPO1 destacando a altimetria do estado do Paraná**



**Fonte:** O próprio autor.

## RESULTADOS E ANÁLISES

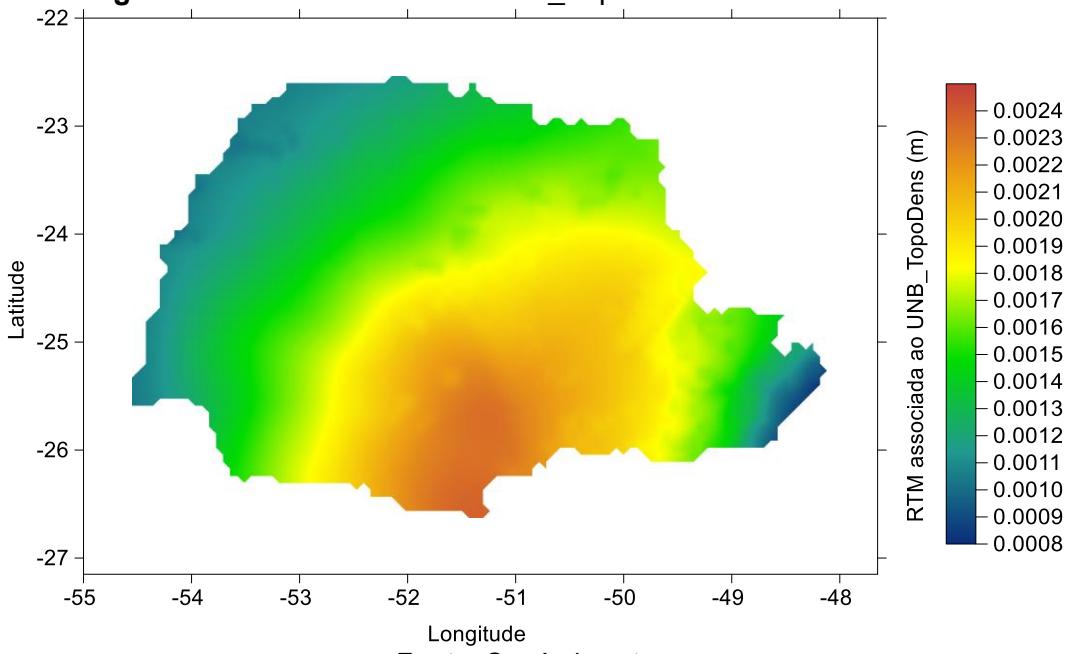
O Quadro 1 apresenta o resumo estatístico das RTM calculadas a partir dos modelos de densidades UNB\_TopoDens e Harkness. O principal resultado do presente trabalho está apresentado na Figura 8, na qual pode-se observar o comportamento da RTM no estado do Paraná. Numericamente a RTM variou entre 0,0008 e 0,0024 milímetros, indicando a necessidade da devida consideração da RTM em trabalhos altimétricos de precisão.

**Quadro 1 – Resumo estatístico das RTM calculadas**

Descriptor	RTM UNB_TopoDens	RTM Harkness
Média (m)	0,00167	0,00170
Desvio padrão (m)	0,00036	0,00037
Amplitude (m)	0,00154	0,00142
Mínimo (m)	0,00084	0,00093
Máximo (m)	0,00237	0,00235
Contagem (pontos)	2535	2535

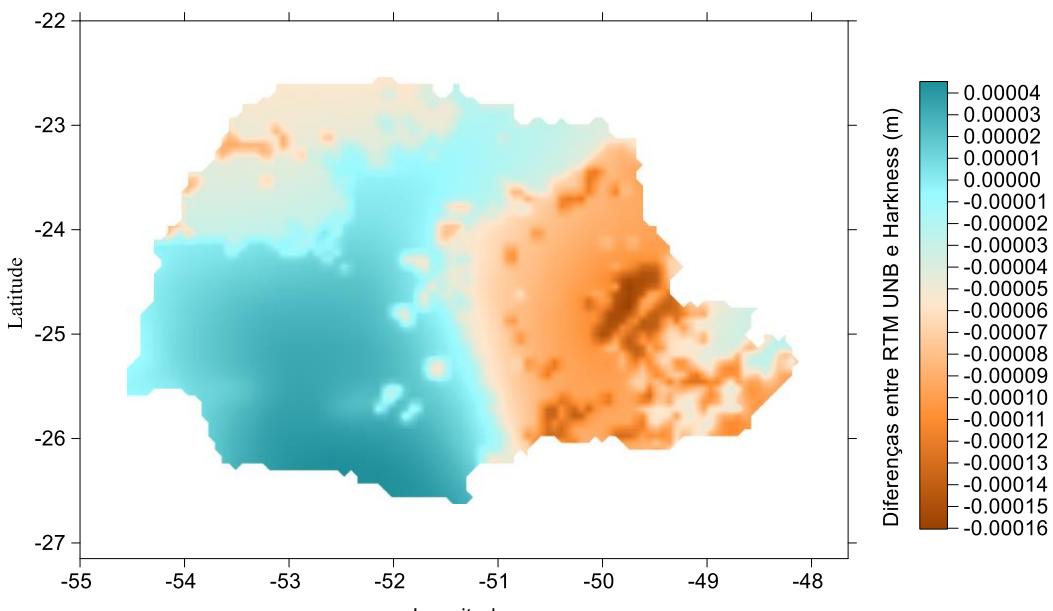
**Fonte:** O próprio autor.

**Figura 8 – RTM associada ao UNB\_TopoDens no estado do Paraná**



**Fonte:** O próprio autor.

A Figura 9 mostra as diferenças numéricas entre as RTM calculadas utilizando a integral de Newton associadas aos modelos de densidades UNB\_TopoDens e Harkness. A amplitude das diferenças das RTM alcançou 0,0002 milímetros, o que indica alto grau de correlação (semelhança local) entre os dois modelos de densidades conforme se pode confirmar através do Quadro 2, mostrando a correlação de 99,1%.

**Figura 9 – Diferenças numéricas entre as RTM UNB\_TopoDens e Harkness**

**Fonte:** O próprio autor.

**Quadro 2 – Correlações entre os modelos UNB\_TopoDens e Harkness**

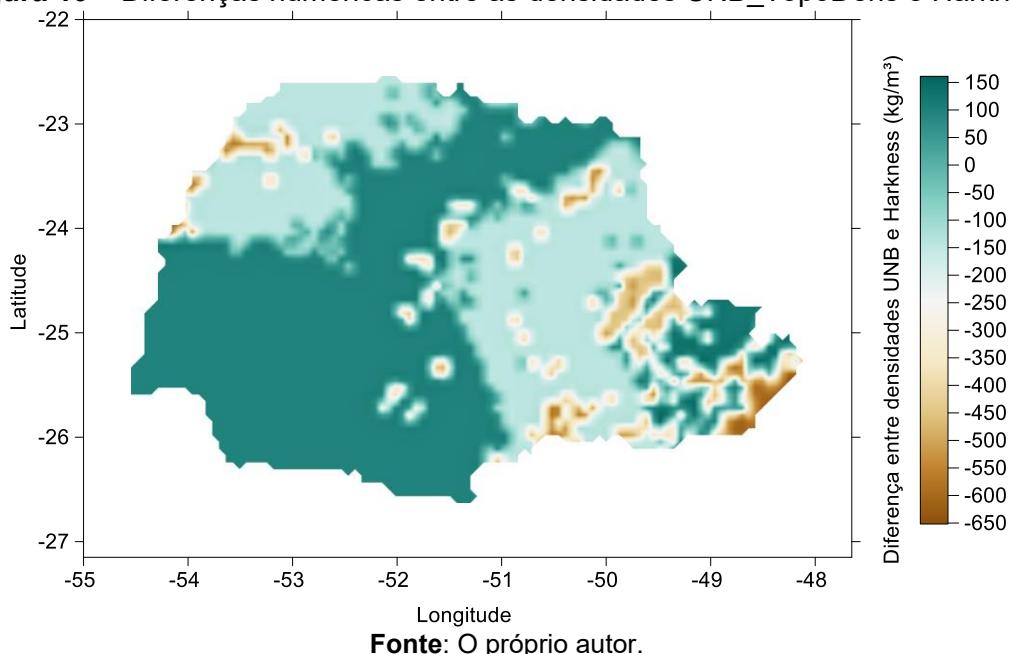
Modelo	UNB_TopoDens	Harkness
UNB_TopoDens	1	
Harkness	0,991	1

**Fonte:** O próprio autor.

As diferenças numéricas entre os modelos de densidades UNB\_TopoDens e Harkness são mostradas na Figura 10, onde, embora as RTM calculadas com estes modelos tenham apresentado alta similaridade, a simples subtração dos valores de densidades (modelo UNB\_TopoDens menos modelo Harkness) pode variar no estado do Paraná entre -150 e 650 kg/m<sup>3</sup>. A diferença indica que o modelo clássico de densidades laterais (Harkness, 2670 kg/m<sup>3</sup>), em geral, apresenta maiores valores para as densidades laterais que o modelo global UNB\_TopoDens (valor médio para o presente estudo no estado do Paraná, 2629,507 kg/m<sup>3</sup>).

Finalmente, tem-se os valores médios para os 2535 pontos trabalhados no estado do Paraná, da altitude ortométrica média ETOPO1 é de 641,424 metros e a densidade lateral média UNB\_TopoDens é de 2629,507 kg/m<sup>3</sup> (98,5% da Harkness).

**Figura 10** – Diferenças numéricas entre as densidades UNB\_TopoDens e Harkness



**Fonte:** O próprio autor.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo obteve pleno êxito em sua implementação e resultados. A metodologia proposta mostrou-se eficiente, e os dados utilizados foram suficientes para o propósito deste trabalho. Aprimoramentos do modelo matemático, como utilização de correções harmônicas, dados posicionais e de densidade de altas resoluções, devem ser futuramente estudados e empregados. Também importantes serão as avaliações em acurácia dos diversos grupos de dados e aplicação de modelos de ajustamento.

## REFERÊNCIAS

- BEAR, Gregory William; AL-SHUKRI, Haydar Jamil; RUDMAN, Andrew James. Linear inversion of gravity data for 3-D density distributions. **Geophysics**, Tulsa, v. 60, n. 5, p. 1354–1364, 1995.
- CARMICHAEL, Robert Samuel. **Practical handbook of physical properties of rocks and minerals**. Boca Raton: CRC Press, 1989.
- HARKNESS, William. **Solar parallax and its related constants, including the figure and density of the earth**. Washington, DC: Government Printing Office, 1891.
- HARTMANN, Jens; MOOSDORF, Nils. The new global lithological map database GLiM: a representation of rock properties at the earth surface. **Geochemistry, Geophysics, Geosystems**, [Washington, DC], v. 13, p. 1–37, Dec. 2012. DOI: <https://doi.org/10.1029/2012GC004370>.
- HECK, Bernhard; SEITZ, Klaus. A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 81, p. 121–136, 2007.

- HEISKANEN, Weikko Aleksanteri; MORITZ, Helmut. **Physical geodesy**. San Francisco: Freeman, 1967.
- HINZE, William J. Bouguer reduction density, why 2.67? **Geophysics**, Tulsa, v. 68, n. 5, p. 1559–1560, Sept. 2003.
- LASKE, Gabi; MASTERS, Guy; MA, Zhitu; PASYANOS, Michael. CRUST1.0: an updated global model of Earth's CRUST. **Geophysical Research Abstracts**, v. 14, EGU2012-3743-1, 2012.
- MOLODENSKII, Mikhail Sergeyevich; EREMEEV, Vladimir Fedorovich; YURKINA, Marina Ivanovna. **Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth**. Jerusalem: Israeli Programme for the Translation of Scientific Publications, 1962.
- MORITZ, Helmut. **Advanced physical geodesy**. Karlsruhe: Wichmann, 1980.
- NAGY, Dénes; PAPP, Gábor; BENEDEK, János. The gravitational potential and its derivatives for the prism. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 74, n. 7, p. 552–560, 2000. DOI:10.1007/s001900000116
- NOAA - NATIONAL OCEANIC AND ATMOSPHERIC ADMINISTRATION. **ETOPO1 1 Arc-Minute Global Relief Model**. [S. l.]: NOAA, 2020. Disponível em: <https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/relief/ETOPO1/data/>. Acesso em: 12 fev. 2025.
- ODALOVIĆ, Olivera R.; GREKULOVICIĆ, Svetlana M.; STARČEVIĆ, Milorad; NIKOLIĆ, Darko; DRAKUL, Marko S. T.; JOKSIMOVIĆ, Dragana. Terrain correction computations using digital density model of topographic masses. **Geodetsky Vestnik**, Ljubljana, v. 62, n. 1, p. 79–97, 2018.
- SHENG, Ming-Bo; SHAW, Chris; VANÍČEK, Petr; KINGDON, Robert W.; SANTOS, Marcelo; FOROUGHI, Iraj. Formulation and validation of a global laterally varying topographical density model. **Tectonophysics**, Amsterdam, v. 672, p. 45–60, July 2019.
- SJÖBERG, Lars. The effect on the geoid of lateral topographic density variations. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 78, n.1, p. 34–39, Jan. 2004.
- TENZER, Robert; HAMAYUN, Zia; PRUTKIN, Igor. A comparison of various integration methods for solving Newton's integral in detailed forward modelling. In: INTERNATIONAL ASSOCIATION OF GEODESY SYMPOSIA, 2010, Berlin. **Anais** [...]. Berlin: Springer, 2010. p. 361–368. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-10634-7\\_48](https://doi.org/10.1007/978-3-642-10634-7_48).
- TENZER, Robert; CHEN, Wenbin; BARANOV, Alexey A.; BAGHERBANDI, Mohammad. Gravity maps of Antarctic lithospheric structure from remote-sensing and seismic data. **Pure and Applied Geophysics**, Basel, v. 175, p. 2181–2203, Feb. 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00024-018-1795-z>.
- TENZER, Robert; CHEN, Wenbin; RATHNAYAKE, Sanjeewa; PITOŇÁK, Miroslav. The effect of anomalous global lateral topographic density on the geoid-to-quasigeoid separation. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 95, n. 12, p. 1–20, Jan. 2021. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00190-020-01457-6>.
- TOUSHMALANI, Reza; SAIBI, Hamed. 3D gravity inversion using Tikhonov regularization. **Acta Geophysica**, v. 63, n. 4, p. 1044–1065, Aug. 2015. DOI: 10.1515/acgeo-2015-0029.
- VANÍČEK, Petr; KRAKIWSKY, Edward John. **Geodesy the Concepts**. Amsterdam: North-Holland, 1986. p. 1–697.
- VANÍČEK, Petr; TENZER, Robert; SJÖBERG, Lars Erik; MARTINEC, Zdeněk; FEATHERSTONE, Will Edward. New views of the spherical Bouguer gravity anomaly. **Geophysical Journal International**, Oxford, v. 159, n. 2, p. 460–472, Nov. 2004. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2004.02435.x>.

WANG, Yong-Wei *et al.* Colorado geoid computation experiments: overview and summary. **Journal of Geodesy**, Berlin, v. 95, p. 1–21, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00190-021-01567-9>.

**Recebido:** fevereiro de 2025.  
**Aceito:** junho de 2025.